

La ecuación fundamental de conducción de calor que permite determinar la distribución de temperatura en una barra delgada larga y homogénea, es la **Ecuación de Fourier**, que para una barra aislada y unidimensional, se escribe,

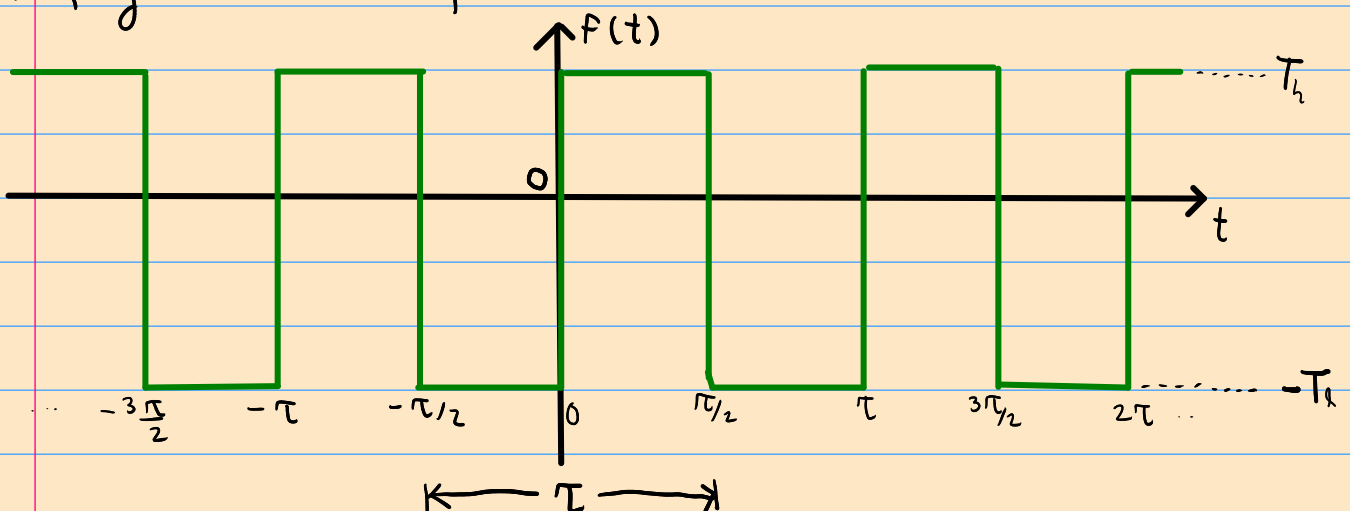
$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{1}{\kappa} \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad (1)$$

donde $\theta(x,t)$ es la oscilación de la temperatura con respecto a la temperatura ambiente en (x,t) y κ es la difusividad térmica del material.

El calentamiento en nuestro experimento se logra colocando una fuente de temperatura oscilante en uno de los extremos de la barra. La temperatura de esta fuente oscila como la siguiente función escalón:

$$f(t) = \begin{cases} -T_l, & -\pi/2 \leq t \leq 0 \\ T_h, & 0 \leq t \leq \pi/2 \end{cases} \quad (2)$$

donde T_h y T_l indican los valores entre los que oscila la función, y π es el periodo de oscilación.



Planteamos la función $f(t)$ como una serie de Fourier

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} f_n e^{i\left(\frac{2\pi}{\tau}\right)nt}, \quad (3)$$

donde

$$f_n = \frac{1}{\tau} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} f(t) e^{-i\left(\frac{2\pi}{\tau}\right)nt} dt \quad (4)$$

y

$$f_0 = \frac{1}{\tau} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(t) dt. \quad (5)$$

Comencemos calculando este f_0

$$f_0 = \frac{1}{\tau} \int_{-\pi/2}^0 (-T_h) dt + \frac{1}{\tau} \int_0^{\pi/2} (T_h) dt$$

$$= -\frac{1}{\tau} T_h t \Big|_{-\pi/2}^0 + \frac{1}{\tau} T_h t \Big|_0^{\pi/2}$$

$$= -\frac{1}{\tau} T_h (0 - (-\pi/2)) + \frac{1}{\tau} T_h (\pi/2 - 0)$$

$$= -\frac{1}{\tau} T_h \left(+\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{\tau} T_h \left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$f_0 = \frac{T_h - T_h}{2}$$

(6)

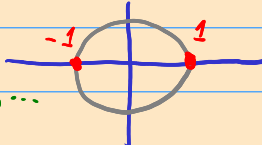
Ahora calculemos los f_n

$$f_n = \frac{1}{\tau} \int_{-\tau/2}^0 (-T_r) e^{-i(\frac{2\pi}{\tau})nt} dt + \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau/2} (T_h) e^{-i(\frac{2\pi}{\tau})nt} dt$$

$$= \frac{1}{\tau} (-T_r) \frac{1}{-i\frac{2\pi}{\tau}n} e^{-i\frac{2\pi}{\tau}nt} \Big|_{-\tau/2}^0 + \frac{1}{\tau} (T_h) \frac{1}{-i\frac{2\pi}{\tau}n} e^{-i\frac{2\pi}{\tau}nt} \Big|_0^{\tau/2}$$

$$= \frac{T_r}{\tau} \frac{\tau}{i2\pi n} (1 - e^{i\frac{2\pi}{\tau}n\frac{\tau}{2}}) - \frac{T_h}{\tau} \frac{\tau}{i2\pi n} (e^{-i\pi n} - 1)$$

$$= \frac{T_r}{\tau} \frac{\tau}{i2\pi n} (1 - e^{i\pi n}) + \frac{T_h}{\tau} \frac{\tau}{i2\pi n} (1 - e^{-i\pi n})$$

$e^{i\pi n} = -1$ } $S: \begin{cases} n=1,3,5,\dots \\ n=-1,-3,-5,\dots \end{cases}$  $e^{i\pi n} = 1$ } $S: \begin{cases} n=2,4,6,\dots \\ n=-2,-4,-6,\dots \end{cases}$

Así comprobamos rápidamente que para n pares, los f_n se anulan

$$f_{n_{\text{par}}} = \frac{T_r}{i2\pi n} (1 - 1) + \frac{T_h}{i2\pi n} (1 - 1)$$

y así

$$f_n = 0, \text{ para } n = \dots, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \dots \quad (7)$$

En cambio, para n impar tenemos

$$f_{n_{\text{impar}}} = \frac{T_r}{i2\pi n} (1 - (-1)) + \frac{T_h}{i2\pi n} (1 - (-1))$$

$$= \frac{2T_r}{i2\pi n} + \frac{2T_h}{i2\pi n}$$

y así

$$f_n = \frac{T_r + T_h}{i\pi n}, \text{ para } n = \dots, -3, -1, 1, 3, 5, \dots \quad (8)$$

Conociendo la forma de los f_n , podemos sustituirlos en la ecuación (3), para tener

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\dots, -7, -5, -3, -1} \left(\frac{T_h + T_l}{i\pi n} \right) e^{i\left(\frac{2\pi}{\tau}\right)nt} + \left(\frac{T_h - T_l}{2} \right) + \sum_{n=1, 3, 5, 7, \dots}^n \left(\frac{T_h + T_l}{i\pi n} \right) e^{i\left(\frac{2\pi}{\tau}\right)nt},$$

Cambiando de índice nudo en la primera sumatoria $n \rightarrow -n$

$$f(t) = \sum_{n=1, 3, 5, \dots}^{n=\infty} \left(\frac{T_h + T_l}{-i\pi n} \right) e^{-i\left(\frac{2\pi}{\tau}\right)nt} + \left(\frac{T_h - T_l}{2} \right) + \sum_{n=1, 3, 5, \dots}^n \left(\frac{T_h + T_l}{i\pi n} \right) e^{i\left(\frac{2\pi}{\tau}\right)nt},$$

Asociando sumatorias

$$f(t) = \frac{T_h - T_l}{2} + \sum_{n=1, 3, 5, \dots}^{n=\infty} \left(\frac{T_h + T_l}{i\pi n} \right) \left[e^{i\left(\frac{2\pi}{\tau}\right)nt} - e^{-i\left(\frac{2\pi}{\tau}\right)nt} \right],$$

Usando la fórmula de De Moivre

$$f(t) = \frac{T_h - T_l}{2} + \sum_{n=1, 3, \dots}^{n=\infty} \left(\frac{T_h + T_l}{i\pi n} \right) \left[\cos\left(\frac{2\pi}{\tau}nt\right) + i\text{Sen}\left(\frac{2\pi}{\tau}nt\right) - \cos\left(-\frac{2\pi}{\tau}nt\right) - i\text{Sen}\left(-\frac{2\pi}{\tau}nt\right) \right],$$

Recordemos que el coseno es una función par, por lo cual $\cos(x) = \cos(-x)$,

y el seno es una función impar, es decir $\text{Sen}(-x) = -\text{Sen}(x)$

por lo tanto

$$f(t) = \frac{T_h - T_l}{2} + \sum_{n=1, 3, \dots}^{n=\infty} \left(\frac{T_h + T_l}{i\pi n} \right) \left[\cancel{\cos\left(\frac{2\pi}{\tau}nt\right)} + i\text{Sen}\left(\frac{2\pi}{\tau}nt\right) - \cancel{\cos\left(\frac{2\pi}{\tau}nt\right)} + i\text{Sen}\left(\frac{2\pi}{\tau}nt\right) \right],$$

los términos con Cosenos se anulan, y nos queda

$$f(t) = \frac{T_h - T_l}{2} + \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \left(\frac{T_l + T_h}{i\pi n} \right) \left[2i \operatorname{Sen} \left(\frac{2\pi}{\tau} nt \right) \right],$$

$$f(t) = \frac{T_h - T_l}{2} + 2 \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \left(\frac{T_l + T_h}{n\pi} \right) \operatorname{Sen} \left(\frac{2\pi}{\tau} nt \right) \quad (9)$$

Si se elige una fuente excitante (calentador periódico) tal que

$$T_h = T_l = \theta_0,$$

entonces

$$f(t) = \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{4\theta_0}{\pi n} \operatorname{Sen} \left(\frac{2\pi}{\tau} nt \right) \quad (10)$$

Este resultado concuerda con la ecuación [2] publicada por A. Bodas et. al., en su artículo "An undergraduate experiment on the propagation of thermal waves", Am. J. Phys. 66 (6), Junio 1998.

Ahora, retomando la ecuación diferencial para la temperatura de la barra es

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} T(x,t) = \frac{1}{D} \frac{\partial}{\partial t} T(x,t), \quad (11)$$

para la cual proponemos una solución en forma de series

$$T(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} T_n(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n(x) B_n(t),$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n(x) b_n e^{i \left(\frac{2\pi}{\tau} \right) nt} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A'_n(x) e^{i\omega_n t},$$

donde

$$B_n(t) = b_n e^{i \left(\frac{2\pi}{\tau} \right) nt}, \quad A'_n(x) = A_n(x) b_n, \quad \omega_n = \omega_n = \frac{2\pi}{\tau} n.$$

Dados los resultados anteriores, es conveniente escribir la propuesta de solución como

$$T(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{-1} A'_n(x) e^{i\left(\frac{2\pi}{\tau}\right)nt} + A'_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} A'_n(x) e^{i\left(\frac{2\pi}{\tau}\right)nt} \quad (12)$$

Sustituimos (12) en (11)

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\sum_{n=-\infty}^{-1} A'_n(x) e^{i\omega_n t} + A'_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} A'_n(x) e^{i\omega_n t} \right] = \\ = \frac{1}{D} \frac{\partial}{\partial t} \left[\sum_{n=-\infty}^{-1} A'_n(x) e^{i\omega_n t} + A'_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} A'_n(x) e^{i\omega_n t} \right],$$

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{\partial^2 A'_n(x)}{\partial x^2} e^{i\omega_n t} + \frac{\partial^2 A'_0(x)}{\partial x^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^2 A'_n(x)}{\partial x^2} e^{i\omega_n t} = \\ = \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{i\omega_n}{D} \frac{\partial A'_n(x)}{\partial x^2} e^{i\omega_n t} + 0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i\omega_n}{D} \frac{\partial A'_n(x)}{\partial x^2} e^{i\omega_n t},$$

Por ortogonalidad, planteamos dos ecuaciones

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} A_n(x) = \frac{i\omega_n}{D} A_n(x) \quad (13)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} A_0(x) = 0 \quad (14)$$

donde revertí la notación $A'_n \rightarrow A_n$ solo por simplicidad, pero no hay que olvidar que A_n ha absorbido una constante de $B_n(x)$.

La solución de (14) es directa

$$A_0(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x \quad (15)$$

Ahora para (13) proponemos la solución

$$A_n(x) = a_n^+ e^{\sqrt{\frac{i\omega_n}{D}}x} + a_n^- e^{-\sqrt{\frac{i\omega_n}{D}}x}, \quad (16)$$

dado que

$$\sqrt{i} = \frac{1}{\sqrt{2}} (1+i)$$

entonces

$$A_n(x) = a_n^+ e^{[(1+i)\sqrt{\frac{\omega_n}{2D}}]x} + a_n^- e^{[-(1+i)\sqrt{\frac{\omega_n}{2D}}]x} \quad (17)$$

Verifiquemos esta solución:

$$\frac{dA_n}{dx} = (1+i)\sqrt{\frac{\omega_n}{2D}} a_n^+ e^{[(1+i)\sqrt{\frac{\omega_n}{2D}}]x} - (1+i)\sqrt{\frac{\omega_n}{2D}} a_n^- e^{[-(1+i)\sqrt{\frac{\omega_n}{2D}}]x},$$

$$\frac{d^2 A_n}{dx^2} = (1+i)^2 \frac{\omega_n}{2D} a_n^+ e^{[(1+i)\sqrt{\frac{\omega_n}{2D}}]x} + (2i) \frac{\omega_n}{2D} a_n^- e^{[-(1+i)\sqrt{\frac{\omega_n}{2D}}]x},$$

$$\frac{d^2 A_n}{dx^2} = \frac{i\omega_n}{D} a_n^+ e^{[(1+i)\sqrt{\frac{\omega_n}{2D}}]x} + \frac{i\omega_n}{D} a_n^- e^{[-(1+i)\sqrt{\frac{\omega_n}{2D}}]x},$$

$$\frac{d^2 A_n}{dx^2} = \frac{i\omega_n}{D} A_n \quad \checkmark$$

Conociendo los A_n (15 y 17), volvemos a la solución para la Temperatura (12)

$$T(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ a_n^+ e^{[(1+i)\sqrt{\frac{\omega_n}{2D}}]x} + a_n^- e^{[-(1+i)\sqrt{\frac{\omega_n}{2D}}]x} \right\} e^{i\left(\frac{2\pi}{\tau}\right)nt} \\ + (\alpha_0 + \alpha_1 x) \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n^+ e^{[(1+i)\sqrt{\frac{\omega_n}{2D}}]x} + a_n^- e^{[-(1+i)\sqrt{\frac{\omega_n}{2D}}]x} \right\} e^{i\left(\frac{2\pi}{\tau}\right)nt},$$

Como $\omega_n = \frac{2\pi}{\tau} n$, entonces

$$\sqrt{\frac{\omega_n}{2D}} = \sqrt{\frac{2\pi}{\tau} \frac{n}{2D}} = \sqrt{\frac{\pi}{\tau D}} \sqrt{n}$$

y así, la solución es

$$T(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{-1} \left\{ a_n^+ e^{[(j+i)\sqrt{\frac{\pi}{\tau D}} \sqrt{|n|} x]} + a_n^- e^{[-(j+i)\sqrt{\frac{\pi}{\tau D}} \sqrt{|n|} x]} \right\} e^{i\omega n t} + (\alpha_0 + \alpha_1 x)$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n^+ e^{[(j+i)\sqrt{\frac{\pi}{\tau D}} \sqrt{|n|} x]} + a_n^- e^{[-(j+i)\sqrt{\frac{\pi}{\tau D}} \sqrt{|n|} x]} \right\} e^{i\omega n t}$$

Si: $n < 0$, $\sqrt{|n|} = \sqrt{-|n|} = i\sqrt{|n|}$,

$$(j+i)\sqrt{|n|} = (j+i)i\sqrt{|n|} = (i-j)\sqrt{|n|}$$

así, podemos escribir

$$T(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{-1} \left\{ a_n^+ e^{[(i-j)\sqrt{\frac{\pi}{\tau D}} \sqrt{|n|} x]} + a_n^- e^{[-(i-j)\sqrt{\frac{\pi}{\tau D}} \sqrt{|n|} x]} \right\} e^{i\omega n t} + (\alpha_0 + \alpha_1 x)$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n^+ e^{[(j+i)\sqrt{\frac{\pi}{\tau D}} \sqrt{|n|} x]} + a_n^- e^{[-(j+i)\sqrt{\frac{\pi}{\tau D}} \sqrt{|n|} x]} \right\} e^{i\omega n t}$$

o bien

$$T(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{-1} \left\{ a_n^+ e^{[(i-j)\sqrt{\frac{\pi|n|}{\tau D}} x]} + a_n^- e^{[-(i-j)\sqrt{\frac{\pi|n|}{\tau D}} x]} \right\} e^{i\omega n t} + (\alpha_0 + \alpha_1 x) + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n^+ e^{[(j+i)\sqrt{\frac{\pi|n|}{\tau D}} x]} + a_n^- e^{[-(j+i)\sqrt{\frac{\pi|n|}{\tau D}} x]} \right\} e^{i\omega n t} \quad (18)$$

Veamos si puedo simplificar esta expresión. En la primera sumatoria puedo eliminar los operadores de valor absoluto si tomo positivos los límites de serie...

$$T(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n^+ e^{[(i-j)\sqrt{\frac{\pi n}{\tau D}} x]} + a_n^- e^{[-(i-j)\sqrt{\frac{\pi n}{\tau D}} x]} \right\} e^{i\omega n t} + (\alpha_0 + \alpha_1 x)$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n^+ e^{[(j+i)\sqrt{\frac{\pi n}{\tau D}} x]} + a_n^- e^{[-(j+i)\sqrt{\frac{\pi n}{\tau D}} x]} \right\} e^{i\omega n t}$$

Podemos unir las sumatorias

$$T(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n^+ \left\{ e^{[(i-1)\sqrt{\frac{\pi n}{\tau D}}]x} + e^{[(i+1)\sqrt{\frac{\pi n}{\tau D}}]x} \right\} + a_n^- \left\{ e^{[-(i-1)\sqrt{\frac{\pi n}{\tau D}}]x} + e^{[-(i+1)\sqrt{\frac{\pi n}{\tau D}}]x} \right\} \right] e^{i\omega_n t} + \alpha_0 + \alpha_1 x,$$

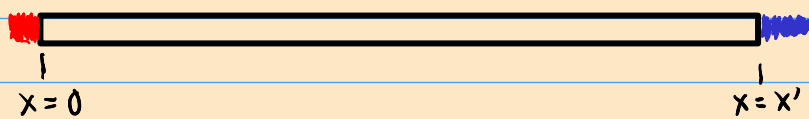
$$T(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n^+ e^{i\sqrt{\frac{\pi n}{\tau D}}x} \left\{ e^{\sqrt{\frac{\pi n}{\tau D}}x} + e^{-\sqrt{\frac{\pi n}{\tau D}}x} \right\} + a_n^- e^{-i\sqrt{\frac{\pi n}{\tau D}}x} \left\{ e^{\sqrt{\frac{\pi n}{\tau D}}x} + e^{-\sqrt{\frac{\pi n}{\tau D}}x} \right\} \right] e^{i\omega_n t} + \alpha_0 + \alpha_1 x,$$

Aquí distingo la aparición de un Coseno Hiperbólico $\text{Cosh}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

$$T(x,t) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n^+ e^{i\sqrt{\frac{\pi n}{\tau D}}x} \text{Cosh}\left(\sqrt{\frac{\pi n}{\tau D}}x\right) + a_n^- e^{-i\sqrt{\frac{\pi n}{\tau D}}x} \text{Cosh}\left(\sqrt{\frac{\pi n}{\tau D}}x\right) \right] e^{i\omega_n t} + \alpha_0 + \alpha_1 x \quad (18')$$

No siendo necesariamente más simple ni/o más compacta que (18), al menos es esta una versión alternativa a la cual tendré a bien denotar como (18').

Consideremos el siguiente caso particular



$$T(x,t)|_{x=0} = f(t) + 0^\circ\text{C}$$

$$\lim_{x' \rightarrow \infty} T(x',t) = 0^\circ\text{C}$$

Aquí tenemos una barra semi-infinita, con uno de sus extremos siendo calentado por una fuente térmica que oscila como (10). El otro extremo se extiende hasta el infinito, y su temperatura está fija en 0°C .

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n e^{i\left(\frac{2\pi}{\tau}\right)nt}$$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{-1} f_n e^{i\left(\frac{2\pi}{\tau}\right)nt} + f_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} f_n e^{i\left(\frac{2\pi}{\tau}\right)nt}$$

Partimos de la solución (18), donde sin pérdida de generalidad (todo lo contrario), introducimos diversidad en la forma de

$$T(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{-1} \left\{ a_n^+ e^{[(i-1)\sqrt{\frac{\pi|n|}{\tau D}}]x} + a_n^- e^{[-(i-1)\sqrt{\frac{\pi|n|}{\tau D}}]x} \right\} e^{i\omega n t} + (\alpha_0 + \alpha_1 x) + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ b_n^+ e^{[(i+1)\sqrt{\frac{\pi|n|}{\tau D}}]x} + b_n^- e^{[-(i+1)\sqrt{\frac{\pi|n|}{\tau D}}]x} \right\} e^{i\omega n t}, \quad (18'')$$

forma misma que he tenido a bien bautizar como (18'').

Aplicaremos las condiciones de frontera a la solución (18"),

Comenzando por

$$\lim_{x \rightarrow \infty} T(x,t) = 0^\circ\text{C} = \sum_{n=-\infty}^{-1} \left\{ a_n^+ e^{[(i-1)\sqrt{\frac{\pi|n|}{\tau D}}]x} + a_n^- e^{[-(i-1)\sqrt{\frac{\pi|n|}{\tau D}}]x} \right\} e^{i\omega_n t} \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ b_n^+ e^{[(i+1)\sqrt{\frac{\pi n}{\tau D}}]x} + b_n^- e^{[-(i+1)\sqrt{\frac{\pi n}{\tau D}}]x} \right\} e^{i\omega_n t} \\ + \alpha_0 + \alpha_1 x$$

de donde se ve que para que se satisfaga la condición de frontera, se vuelve entonces menester que se satisfaga así mismo lo siguiente

$$\alpha_0 = \alpha_1 = a_n^- = b_n^+ = 0 \quad , \quad (19)$$

con lo cual la solución se reduce a

$$T(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n^+ e^{[(i-1)\sqrt{\frac{\pi|n|}{\tau D}}]x} e^{i\omega_n t} \\ + \sum_{n=1}^{\infty} b_n^- e^{[-(i+1)\sqrt{\frac{\pi n}{\tau D}}]x} e^{i\omega_n t} \quad (20)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n^+ e^{-\sqrt{\frac{\pi|n|}{\tau D}}x} e^{i\sqrt{\frac{\pi|n|}{\tau D}}x} e^{i\omega_n t} \\ + \sum_{n=1}^{\infty} b_n^- e^{-\sqrt{\frac{\pi n}{\tau D}}x} e^{-i\sqrt{\frac{\pi n}{\tau D}}x} e^{i\omega_n t}$$

Ahora para aplicar la condición de frontera del extremo que está siendo excitado, evaluamos (20) en $x=0$:

$$T(x,t)|_{x=0} = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n^+ e^{i\omega_n t} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n^- e^{i\omega_n t} \quad (21)$$

Para aplicar esta condición de frontera, es conveniente recordar que (10) puede ser expresada en la forma

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\dots, -7, -5, -3, -1} \left(\frac{T_x + T_h}{i\pi n} \right) e^{i\left(\frac{2\pi}{\tau}\right)nt} + \left(\frac{T_h - T_x}{2} \right) + \sum_{n=1, 3, 5, 7, \dots}^n \left(\frac{T_x + T_h}{i\pi n} \right) e^{i\left(\frac{2\pi}{\tau}\right)nt},$$

que nos es conveniente para apreciar rápidamente la forma de los coeficientes a_n^+ y b_n^- , por ser estos coeficientes de exponenciales.

Apliquemos la condición $T_x = T_h = \theta_0$ propia de (10), e identifiquemos $\omega_n = \left(\frac{2\pi}{\tau}\right)n$, para obtener:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\dots, -5, -3, -1} \left(\frac{2\theta_0}{i\pi n} \right) e^{i\omega_n t} + \sum_{n=1, 3, 5, \dots}^{n=\infty} \left(\frac{2\theta_0}{i\pi n} \right) e^{i\omega_n t} \quad (22)$$

Iguando (21) y (22),

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n^+ e^{i\omega_n t} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n^- e^{i\omega_n t} = \sum_{n=-\infty}^{n=\dots, -3, -1} \left(\frac{2\theta_0}{i\pi n} \right) e^{i\omega_n t} + \sum_{n=1, 3, 5, \dots}^{n=\infty} \left(\frac{2\theta_0}{i\pi n} \right) e^{i\omega_n t},$$

podemos observar que la condición de frontera implica que

$$a_n^+ = \frac{2\theta_0}{i\pi n}, \quad n = -1, -3, -5, \dots$$

$$a_n^+ = 0, \quad (n \geq 0) \cup (n = -2, -4, -6, \dots)$$

$$b_n^- = \frac{2\theta_0}{i\pi n}, \quad n = 1, 3, 5, \dots$$

$$b_n^- = 0, \quad (n \leq 0) \cup (n = 2, 4, 6, \dots)$$

(23)

Aplicando los resultados (23) a la solución (20):

$$T(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\dots,-5,-3,-1} \left(\frac{2\theta_0}{i\pi n}\right) e^{[(i-1)\sqrt{\frac{\pi|n|}{\tau_0}}]x} e^{i\omega n t} + \sum_{n=1,3,5,\dots}^n \left(\frac{2\theta_0}{i\pi n}\right) e^{[-(i+1)\sqrt{\frac{\pi|n|}{\tau_0}}]x} e^{i\omega n t} \quad (24)$$

En la primera sumatoria de (24) cambio el índice $n \rightarrow -n$,

$$\sum_{n=-\infty}^{n=\dots,-3,-1} \left(\frac{2\theta_0}{i\pi n}\right) e^{[(i-1)\sqrt{\frac{\pi|n|}{\tau_0}}]x} e^{i\omega n t} \rightarrow \sum_{n=1,3,5,\dots}^n -\left(\frac{2\theta_0}{i\pi n}\right) e^{[(i-1)\sqrt{\frac{\pi|n|}{\tau_0}}]x} e^{-i\omega n t}$$

y sustituyo en (24):

$$T(x,t) = -\sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \left(\frac{2\theta_0}{i\pi n}\right) e^{-\sqrt{\frac{\pi n}{\tau_0}}x} e^{i[\sqrt{\frac{\pi n}{\tau_0}}x - \omega n t]} + \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \left(\frac{2\theta_0}{i\pi n}\right) e^{-\sqrt{\frac{\pi n}{\tau_0}}x} e^{-i[\sqrt{\frac{\pi n}{\tau_0}}x - \omega n t]}$$

Ahora simplificamos:

$$T(x,t) = \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \left(\frac{2\theta_0}{i\pi n}\right) e^{-\sqrt{\frac{\pi n}{\tau_0}}x} \left\{ e^{-i[\sqrt{\frac{\pi n}{\tau_0}}x - \omega n t]} - e^{i[\sqrt{\frac{\pi n}{\tau_0}}x - \omega n t]} \right\}$$

Usando la fórmula de De Moivre

$$T(x,t) = \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \left(\frac{2\theta_0}{i\pi n}\right) e^{-\sqrt{\frac{\pi n}{\tau_0}}x} \left\{ \cos[-(\sqrt{\frac{\pi n}{\tau_0}}x - \omega n t)] + i \operatorname{Sen}[-(\sqrt{\frac{\pi n}{\tau_0}}x - \omega n t)] - \cos(\sqrt{\frac{\pi n}{\tau_0}}x - \omega n t) - i \operatorname{Sen}(\sqrt{\frac{\pi n}{\tau_0}}x - \omega n t) \right\}$$

Como $\cos(-x) = \cos(x)$ y $\operatorname{Sen}(-x) = -\operatorname{Sen}(x)$, entonces

$$T(x,t) = \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \left(\frac{2\theta_0}{i\pi n}\right) e^{-\sqrt{\frac{\pi n}{\tau_0}}x} \left\{ \cancel{\cos(\sqrt{\frac{\pi n}{\tau_0}}x - \omega n t)} - i \operatorname{Sen}(\sqrt{\frac{\pi n}{\tau_0}}x - \omega n t) - \cancel{\cos(\sqrt{\frac{\pi n}{\tau_0}}x - \omega n t)} - i \operatorname{Sen}(\sqrt{\frac{\pi n}{\tau_0}}x - \omega n t) \right\}$$

$$T(x,t) = \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \left(\frac{2\theta_0}{i\pi n}\right) e^{-\sqrt{\frac{\pi n}{\tau_0}}x} \left\{ -2i \operatorname{Sen}(\sqrt{\frac{\pi n}{\tau_0}}x - \omega n t) \right\}$$

$$T(x,t) = \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{4\theta_0}{\pi n} e^{-\sqrt{\frac{\pi n}{\tau_0}}x} \operatorname{Sen}(-\sqrt{\frac{\pi n}{\tau_0}}x + \omega n t) \quad (25)$$

La ecuación (25) representa la solución analítica de la distribución de temperatura tanto en el espacio como en el tiempo. Esto es, $T(x,t)$ contiene la información total y absoluta sobre cómo se comporta la temperatura en todo lugar y en todo momento en el experimento planteado.

El resultado aquí deducido es equivalente al reportado por A. Bodas et. al. en su artículo antes mencionado, como se puede apreciar a continuación.

Since we are interested in the long-term temperature distribution once the system has forgotten the initial conditions, we try the Fourier series²

$$\theta(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(x) \sin(\omega_n t - k_n x) \quad (3)$$

as a solution, where A_n , ω_n , and k_n are, respectively, the amplitude, frequency, and wave number of the n th harmonic.

By introducing this function in the Fourier equation and applying the boundary conditions, we obtain the solution

$$\theta(x,t) = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \theta_n e^{-\epsilon_n x} \sin(\omega_n t - \epsilon_n x), \quad (4)$$

where

$$\theta_n = \frac{4\theta_0}{n\pi}, \quad (5)$$

$$\omega_n = \frac{2n\pi}{\tau}, \quad (6)$$

and

$$\epsilon_n = \sqrt{\frac{\omega_n}{2\kappa}} \quad (7)$$

is the n th harmonic damping coefficient.